Actions algébriques de groupes arithmétiques

Philippe Gille, Laurent Moret-Bailly

Actions algébriques de groupes arithmétiques

Philippe Gille [*‡]
Laurent Moret-Bailly [†]

Référence : cet article est publié dans les actes de la conférence “Torsors, Étale Homotopy and Applications to Rational Points”, Edimbourg (2011), édités par A. Skorobogatov. London Mathematical Society Lecture Notes series, vol. 405 (2013), 231-249.

Résumé : Nous obtenons un résultat général de finitude pour le H^1 de certains schémas en groupes linéaires sur les anneaux de (S-)entiers des corps globaux.
Mots clefs : Schémas en groupes, torseurs, cohomologie plate, groupes arithmétiques **MSC : 14L15, 22E40**.

Abstract : We obtain a general finiteness result for the H^1 of certain linear group schemes over the (S-)integers of global fields.
Keywords : Group schemes, Torsors, Flat cohomology, Arithmetic groups. **MSC : 14L15, 22E40**.

1 Introduction

Soit F un corps de nombres, d'anneau d'entiers A. Soient S un ensemble fini de places finies de F et A_S l'anneau des S-entiers de F, i.e. $A_S = \{x \in F \mid \forall v \notin S,\ v(x) \geq 0\}$. Pour toute place finie v de F, on note F_v le complété de F en v, $\overline{F_v}$ une clôture algébrique de F_v et $\overline{A_v}$ l'anneau des entiers de $\overline{F_v}$. Le but de cet article est de montrer le résultat suivant qui

[*]C.N.R.S. et École normale supérieure (DMA)
[†]IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex

généralise le cas des classes de conjugaison dans les groupes arithmétiques étudié par Platonov [P], [PR, §8.1].

Théorème 1.1 *Soit G un A_S-schéma en groupes affine de type fini. Soit X un A_S-schéma plat, de type fini, muni d'une action*

$$G \times_{A_S} X \to X, \ \ (g,x) \mapsto \rho(g).x.$$

Soit Z_0 un sous-A_S-schéma fermé de X, plat sur A_S. Soit $\mathrm{loc}\,(Z_0)$ *l'ensemble des sous-schémas fermés Z de X* (automatiquement plats sur A_S) *tels que, pour toute place finie $v \notin S$, il existe $g_v \in G(\overline{A_v})$ induisant un isomorphisme*

$$Z_0 \times_{A_S} \overline{A_v} \overset{\rho(g_v)}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} Z \times_{A_S} \overline{A_v}.$$

Alors les orbites de $G(A_S)$ sur $\mathrm{loc}\,(Z_0)$ *sont en nombre fini, i.e* $G(A_S)\backslash \mathrm{loc}\,(Z_0)$ *est fini.*

Ceci répond à une question de E. Ullmo et A. Yafaev ; de façon précise, c'est le corollaire 6.4 qui intervient dans leur article sur la conjecture d'André-Oort sur les points spéciaux des variétés de Shimura [UY].

La démonstration s'appuie sur la théorie des espaces homogènes et la théorie de la cohomologie plate non abélienne.

2 Torseurs

Rappelons tout d'abord quelques définitions dans le cas d'une base affine noethérienne $\mathrm{Spec}(R)$ et d'un R-schéma en groupes affine G. Un G-espace formellement homogène principal (ou encore pseudo-torseur) est un R-schéma E muni d'une action à droite de G telle que le morphisme $(x,g) \mapsto (x, x.g)$: $E \times_R G \to E \times_R E$, soit un isomorphisme ([SGA3], IV.5.1). Un G-torseur E est un G-espace formellement homogène principal localement trivial pour la topologie fppf (fidèlement plate de présentation finie). Cela signifie qu'il existe une R-algèbre S fidèlement plate et de type fini telle que $E \times_R S \cong G \times_R S$.

Pour tout tel recouvrement S, on pose

$$Z^1(S/R,G) = \{ g \in G(S \otimes_R S) \mid p_{1,2}^*(g) p_{2,3}^*(g) = p_{1,3}^*(g) \in G(S \otimes_R S \otimes_R S) \}$$

$$\text{et} \quad H^1(S/R,G) := Z^1(S/R,G)/G(S),$$

où $G(S)$ agit sur $Z^1(S/R,G)$ par $g.z = p_1^*(g)\, z\, p_2^*(g)^{-1}$ ([Kn], chapitre III).

L'ensemble pointé $H^1(S/R,G)$ classifie les G-torseurs (ou, ce qui revient au même, les G-espaces formellement homogènes principaux) E sur $\mathrm{Spec}(R)$ qui sont trivialisés par le changement de base S/R ([M1], §III.4, page 120), i.e. vérifient $E \times_R S \xrightarrow{\sim} G \times_R S$.

Remarque 2.1 On suppose G fini étale. Puisque R est un anneau noethérien, il en est de même de S et de $S \otimes_R S$. En particulier, $G(S \otimes_R S)$ est un groupe fini. Par suite, les ensembles $Z^1(S/R,G)$ et $H^1(S/R,G)$ sont finis.

Toujours sous l'hypothèse G affine sur R noethérien, on définit alors l'ensemble $H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G) := \varinjlim_S H^1(S/R,G)$ comme la limite sur les recouvrements fidèlement plats de type fini de R. L'ensemble pointé $H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G)$ classifie les G-torseurs.

Remarque 2.2 La définition des torseurs donnée ici ne convient que pour les groupes affines. En général, la « bonne » notion est celle de faisceau (sur le site fppf de la base) muni d'une action de G, qui est localement isomorphe à G muni de son action par translations. Le H^1 défini plus haut classifie les torseurs en ce sens plus général ; il se trouve simplement que si G est affine, tout G-torseur est (représentable par) un schéma, par descente fidèlement plate de schémas affines.

Remarque 2.3 (torsion). Étant donné un G-torseur P, notons ${}^P G$ le schéma en groupes tordu associé (appelé « groupe adjoint » dans [Gi]) : c'est une forme intérieure de G, que l'on peut voir comme le schéma des G-automorphismes de P. On a alors une bijection canonique (la « torsion »)

$$H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G) \longrightarrow H^1_{\mathrm{fppf}}(R,{}^P G),$$

associant à un G-torseur Q le schéma $\underline{\mathrm{Isom}}_G(P,Q)$ des G-isomorphismes de P sur Q ; elle envoie P sur le ${}^P G$-torseur trivial. Cette opération est fonctorielle : si $f : G \to G'$ est un morphisme de R-schémas en groupes affines, et si P' est le G'-torseur déduit de P par le changement de groupe f, on a un morphisme ${}^P f : {}^P G \to {}^{P'} G'$ et un diagramme commutatif d'ensembles

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G) & \xrightarrow{u} & H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G') \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v'} \\ H^1_{\mathrm{fppf}}(R,{}^P G) & \xrightarrow{{}^P u} & H^1_{\mathrm{fppf}}(R,{}^{P'} G'). \end{array}$$

où les flèches verticales sont les bijections données par P et P' et les horizontales les morphismes (pointés) de changement de groupe $H^1(f)$ et $H^1({}^P f)$. La remarque fondamentale, utilisée plusieurs fois dans la suite, est que l'application v induit une bijection de la fibre $u^{-1}(u([P])$ sur le noyau de ${}^P u$. Ainsi, l'étude des fibres d'une application du type $H^1(f)$ se ramène à celle d'un noyau, pourvu que les hypothèses faites sur f soient préservées par torsion, ce qui est en pratique facile à vérifier. Tout ceci est fonctoriel par changement de base $\mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$.

Dans la littérature, on considère généralement le cas où le groupe structural G est plat sur la base. Sur une base régulière de dimension un, le cas général se ramène au cas plat, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

3 Schémas sur une base de Dedekind

Soit B un schéma de Dedekind, c'est-à-dire un schéma noethérien régulier de dimension 1. On suppose B connexe, et l'on note η son point générique.

Si X est un B-schéma, nous noterons $\widetilde{X}$ l'adhérence schématique dans X de la fibre générique X_η. C'est un sous-schéma fermé de X ; en outre il est plat sur B, et c'est même l'unique sous-schéma fermé de X plat sur B et ayant la même fibre générique que X ([EGA4], (2.8.1)). On vérifie alors aisément les propriétés suivantes :

- la formation de $\widetilde{X}$ commute au changement de base plat, au sens suivant : si B' est un B-schéma plat, alors $\widetilde{X} \times_B B'$ est l'adhérence schématique de $X_\eta \times_B B'$ dans $X \times_B B'$;
- pour tout B-schéma plat B', on a $\widetilde{X}(B') = X(B')$;
- si X_1 et X_2 sont deux B-schémas, alors $\widetilde{X_1 \times_B X_2} = \widetilde{X_1} \times_B \widetilde{X_2}$;
- en particulier, si G est un B-schéma en groupes, alors $\widetilde{G}$ est un sous-schéma en groupes fermé de G ; en outre, si X est un G-torseur, alors $\widetilde{X}$ est stable sous $\widetilde{G}$ et est un $\widetilde{G}$-torseur pour cette action.

On voit ainsi que $X \mapsto \widetilde{X}$ est un foncteur, adjoint à droite de l'inclusion de la catégorie des B-schémas plats dans celle des B-schémas. Une conséquence des propriétés ci-dessus (notamment de la dernière) est la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Soit B un schéma de Dedekind connexe, et soit G un B-schéma en groupes affine. Si $\widetilde{G} \subset G$ désigne comme ci-dessus l'adhérence* *schématique de la fibre générique de G, le foncteur naturel de changement de groupe est une équivalence de la catégorie des $\widetilde{G}$-torseurs vers celle des G-torseurs. Plus précisément, il admet pour quasi-inverse le foncteur $X \mapsto \widetilde{X}$.*

En particulier, l'application naturelle $H^1_{\text{fppf}}(B, \widetilde{G}) \longrightarrow H^1_{\text{fppf}}(B, G)$ est bijective. □

Remarque 3.2 On peut aussi montrer la dernière assertion en utilisant directement la définition « à la Čech » du H^1 donnée au début : si B' est un B-schéma plat et de type fini, on a en effet $Z^1(B'/B, G) = Z^1(B'/B, \widetilde{G})$ et $G(B') = \widetilde{G}(B')$, d'où $H^1(B'/B, G) = H^1(B'/B, \widetilde{G})$.

Remarque 3.3 Ici encore nous ne nous sommes limités aux groupes affines que pour éluder les questions de représentabilité des torseurs.

Proposition 3.4 *Soient B un schéma de Dedekind, G un B-schéma en groupes localement de type fini, H un sous-schéma en groupes de G, plat sur B. Alors l'immersion canonique de H dans G est un morphisme affine.*

En particulier, si G est affine sur B, il en est de même de H.

Démonstration. On peut supposer B affine connexe, de point générique η. Soit $\overline{H}$ l'adhérence schématique de H dans G. Alors $\overline{H}$ est plat sur B (comme adhérence schématique de sa fibre générique). De plus c'est un sous-schéma en groupes de G ; en effet, comme l'opération d'adhérence schématique commute au changement de base plat, $\overline{H} \times_B \overline{H}$ est l'adhérence schématique de $H \times_B H$ dans $G \times_B G$, d'où l'on déduit que $\overline{H}$ est stable par la loi de groupe.

On peut donc supposer, en remplaçant G par $\overline{H}$, que H est ouvert dans G et que $H_\eta = G_\eta$. Notons alors $f : G \to B$ le morphisme structural, Z le fermé complémentaire de H, z un point de Z, $b = f(z)$, $U = \operatorname{Spec}(A) \subset G$ un voisinage ouvert affine de z (de sorte que U est de type fini sur B). On a $H_\eta = G_\eta$, donc la fibre générique de Z est vide et l'image de $Z \cap U$ dans B est un ensemble fini de points fermés, que l'on peut supposer réduit à $\{b\}$. D'autre part, H_b est un sous-groupe ouvert (donc fermé) de G_b, de sorte que Z_b est une réunion de composantes connexes de G_b. Quitte à restreindre U, on peut donc supposer que $Z \cap U = G_b \cap U$, donc $H \cap U = \operatorname{Spec}(A[1/\pi])$ où π désigne une uniformisante en b.

On a donc montré que tout point de G admet un voisinage affine U tel que $H \cap U$ soit affine, cqfd. □

Remarque 3.5 Les auteurs ignorent si l'on peut se passer de la platitude de H. La proposition XXV.4.1 de [SGA3] impliquerait 3.4 sans cette hypothèse (du moins lorsque G est de type fini), mais elle n'est démontrée dans loc. cit. que pour H lisse ! Pour une autre généralisation de 3.4, voir [A], proposition 2.3.2.

Si H n'est pas plat, la preuve ci-dessus est en défaut car $\overline{H}$ n'est pas toujours un sous-schéma en groupes de G : voici un exemple communiqué par le rapporteur. Prenant pour B un trait, choisissons un B-groupe fini constant non trivial Γ et prenons $G = \Gamma \times_B \Gamma$. Il existe un sous-schéma en groupes H de G ayant pour fibre générique celle de $\Gamma \times_B \{e\}$ et pour fibre spéciale celle de $\{e\} \times_B \Gamma$; l'adhérence de H n'est alors pas un sous-groupe de G. (En revanche, H est bien affine).

Lemme 3.6 *Soit B un schéma de Dedekind connexe de point générique $\eta = Spec(K)$. Soit G un B-schéma en groupes affine, fini et plat sur B. Alors la restriction $H^1_{\mathrm{fppf}}(B, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(K, G)$ est injective.*

Démonstration. Par l'argument habituel de torsion (voir remarque 2.3), il suffit d'établir que la restriction a un noyau trivial. On se donne un G-torseur P qui est trivial au point générique. La théorie de la descente fidèlement plate (e.g. [EGA4, prop. 2.7.1.vii]) montre que P est propre sur B. Par hypothèse, $P(K) \neq \emptyset$, d'où $P(B) \neq \emptyset$ en appliquant le critère valuatif de propreté. On conclut que X est le G-torseur trivial. $\square$

4 Finitude dans le cas local

Soit R un anneau d'entiers p-adiques (i.e. une extension finie de $\mathbf{Z}_p$) de corps des fractions K et de corps résiduel κ. On rappelle que si X est une K-variété algébrique, l'ensemble $X(K)$ est muni d'une topologie naturelle (par exemple [KS] p. 256). Si X est un R-schéma séparé de type fini, alors l'ensemble $X(R)$ est un ouvert compact de $X(K)$.

Lemme 4.1 *Soit G un R-schéma en groupes affine de type fini. Alors l'ensemble de cohomologie plate $H^1_{\mathrm{fppf}}(R, G)$ est fini.*

Démonstration. La proposition 3.1 ramène immédiatement au cas où G est plat sur R. Le groupe G admet une R-représentation fidèle $G \to \mathrm{GL}_n$

([BT], §1.4.5), i.e. fait de G un sous-schéma fermé de GL_n. De plus, le quotient GL_n/G est représentable par un R-schéma X séparé ([A], théorème 4.C page 53). Par descente fidèlement plate, X est de présentation finie [SGA3, VI_B.9.2.xiii]. On a la suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to G(R) \to \mathrm{GL}_n(R) \to X(R) \xrightarrow{\varphi} H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(R,\mathrm{GL}_n) = 1,$$

la dernière égalité étant le théorème 90 de Hilbert-Grothendieck. Par compacité de $X(R)$, il suffit alors de démontrer que les fibres de l'application caractéristique φ sont ouvertes, c'est-à-dire que les orbites $\mathrm{GL}_n(R).x$ sont ouvertes dans $X(R)$. Or, étant donné $x \in X(R)$, le morphisme $\mathrm{GL}_{n,K} \to X_K$, $g \mapsto g.x$, est lisse. Par suite, l'application continue $\mathrm{GL}_n(K) \to X(K)$ est ouverte. Vu que $\mathrm{GL}_n(R)$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(K)$, il résulte que $\mathrm{GL}_n(R).x$ est un ouvert de $X(K)$ et a fortiori un ouvert de $X(R)$. □

Remarque 4.2 Sous les hypothèses de 4.1, l'ensemble $H^1_{\mathrm{fppf}}(K,G)$ est également fini, d'après Borel et Serre [BS, théorème 6.1]. Ce résultat ne sera pas utilisé ici, mais on en verra une version « géométrique » plus loin (proposition 7.2).

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses du lemme 4.1, on suppose en outre que G est lisse sur R. Alors l'application naturelle $H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(\kappa,G_\kappa)$ est injective.*

En outre, si G_κ est connexe, alors $H^1_{\mathrm{fppf}}(\kappa,G_\kappa) = 1$ et par suite, d'après ce qui précède, on a $H^1_{\mathrm{fppf}}(R,G) = 1$.

Démonstration. Pour montrer la première assertion il suffit, par torsion, de montrer que l'application a un noyau trivial. Or un G-torseur X est en particulier un R-schéma lisse, donc l'application naturelle $X(R) \to X(\kappa)$ est surjective puisque R est hensélien. Donc si X_κ est trivial il en est de même de X. (La finitude de κ ne sert pas ici).

La seconde assertion n'est autre que le théorème de Lang (cf. [S], §II.2.3). □

5 Finitude dans le cas global

Soit F un corps de nombres. Soient S un ensemble fini de places finies de F et A_S l'anneau des S-entiers de F. Pour toute place finie v de F, on note F_v le complété de F en v, A_v son anneau d'entiers et κ_v son corps résiduel.

On note $\mathbb{A}_{f,S}$ l'anneau des S-adèles finis de F, c'est-à-dire le sous-anneau de $\prod_{v \notin S} F_v$ formé des éléments (x_v) tels que $x_v \in A_v$ pour presque tout v. Si G est un A_S-schéma en groupes affine de type fini, on pose alors

$$c(A_S, G) = \Big(\prod_{v \notin S} G(A_v) \Big) \backslash G(\mathbb{A}_{f,S}) \,/\, G(F).$$

C'est un ensemble fini ([B], Theorem 5.1) qui peut être décrit en termes de cohomologie plate puisque l'on a une bijection

$$c(A_S, G) \cong \mathrm{Ker}\Big[H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(F, G) \times \prod_{v \notin S} H^1_{\mathrm{fppf}}(A_v, G) \Big].$$

Celle-ci induit, pour tout ensemble fini de places $S' \supset S$, une bijection entre sous-ensembles pointés

$$\Big(\prod_{v \in S' \setminus S} (G(A_v) \backslash G(F_v)) \Big) \,/\, G(A_{S'}) \cong$$
$$\mathrm{Ker}\Big[H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(A_{S'}, G) \times \prod_{v \in S' \setminus S} H^1_{\mathrm{fppf}}(A_v, G) \Big].$$

(Nisnevich, [N] Th. 2.1, voir [G], appendice).

Proposition 5.1 *Soit G un A_S-schéma en groupes affine de type fini. Alors l'ensemble de cohomologie plate $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G)$ est fini.*

Vu que $H^1_{\text{ét}}(A_S, G)$ s'injecte dans $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G)$, la proposition vaut aussi pour l'ensemble de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(A_S, G)$.

Dans le cas où G/A_S est *lisse*, on note alors G^0 le sous-schéma en groupes de G des composantes neutres de G ([BT], §1.2.12). C'est un sous-schéma en groupes ouvert distingué de G, à fibres connexes [1], (nous dirons simplement « connexe »).

Démonstration de la proposition 5.1 :

Cas zéro : G est fini étale sur A_S. Un G-torseur est en particulier un A_S-schéma fini étale de rang n égal à celui de G. C'est donc le spectre d'une A_S-algèbre finie étale de rang n. Le théorème d'Hermite implique qu'il n'existe qu'un nombre fini de telles algèbres, à isomorphisme près, d'où un nombre

1. L'hypothèse de lissité est nécessaire ici comme le montre l'exemple de μ_p sur $\mathbf{Z}$.

fini de possibilités pour le schéma sous-jacent à un G-torseur. Enfin, pour chaque schéma X de ce type, l'ensemble des actions de G sur X est fini, d'où la conclusion.

Premier cas : G est lisse et connexe sur A_S. On considère les applications naturelles

$$H^1_{\text{fppf}}(A_S, G) \xrightarrow{\alpha} H^1_{\text{fppf}}(F, G) \xrightarrow{\beta} \prod_{v \notin S} H^1_{\text{fppf}}(F_v, G).$$

L'application composée $\beta \circ \alpha$ se factorise par le produit $\prod_{v \notin S} H^1_{\text{fppf}}(A_v, G)$ et est donc triviale en vertu du lemme 4.3.

D'autre part, d'après le théorème de Borel-Serre ([BS], théorème 7.1), les fibres de β (en particulier son noyau) sont finies [2]. Il suffit donc de montrer que les fibres de α sont finies. Par torsion, il suffit même de démontrer que son noyau est fini. Or ce noyau est l'ensemble $c(A_S, G)$, qui est fini comme on l'a rappelé plus haut, d'où la finitude de $H^1_{\text{fppf}}(A_S, G)$.

Second cas : G est extension d'un groupe fini étale par un groupe lisse connexe. Le A_S-groupe G/G^0 est alors fini étale et par suite, d'après le cas zéro, l'ensemble $H^1_{\text{fppf}}(A_S, G/G^0)$ est fini ; il suffit donc de voir que les fibres de l'application naturelle

$$H^1_{\text{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\text{fppf}}(A_S, G/G^0)$$

sont finies, ou même, par torsion, que son noyau est fini. Or ce noyau est image de $H^1_{\text{fppf}}(A_S, G^0)$ par l'application évidente, d'où la conclusion par le cas précédent.

Cas général. Il existe un ensemble fini $S' \supset S$ de « mauvaises » places tel que le schéma en groupes $G \times_{A_S} A_{S'}$ soit extension d'un $A_{S'}$-groupe constant tordu par un schéma en groupes lisse et connexe. L'argument de localisation du premier cas fonctionne de nouveau ici. On considère l'application de restriction

$$\Phi : H^1_{\text{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\text{fppf}}(A_{S'}, G) \times \prod_{v \in S' \setminus S} H^1_{\text{fppf}}(A_v, G).$$

L'ensemble $H^1_{\text{fppf}}(A_{S'}, G)$ est fini d'après le second cas et les $H^1_{\text{fppf}}(A_v, G)$ sont des ensembles finis par le lemme 4.1. Il suffit donc de montrer que les fibres

2. Sans hypothèse de connexité sur G/F, il est aussi vrai que l'image de l'application α est finie selon la proposition 4.4 de [HS].

de Φ sont finies. Par torsion, on est ramené à voir que le noyau de Φ est fini. Or ce noyau est l'ensemble fini $\Big(\prod_{v\in S'\setminus S} G(A_v)\backslash G(F_v)\Big)/G(A_{S'})$, ce qui montre la finitude de $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G)$. $\square$

6 Applications

On garde les notations précédant le théorème 1.1. On note $\mathcal{S}$ le « petit site fppf » de A_S, c'est-à-dire la catégorie des A_S-schémas plats de type fini, munie de la topologie fppf ; on appellera « A_S-faisceaux » les faisceaux sur $\mathcal{S}$.

Proposition 6.1 *Soit G un A_S-faisceau en groupes opérant sur un A_S-faisceau E, et soit $x \in E(A_S)$. On note Gx le sous-faisceau de E orbite de x (c'est-à-dire l'image du morphisme $G \to E$ envoyant g sur gx) et H le sous-faisceau en groupes de G stabilisateur de x.*

On suppose que H est représentable par un A_S-schéma en groupes affine de type fini. Alors l'ensemble quotient $G(A_S)\backslash(Gx)(A_S)$ est fini.

Démonstration. Comme Gx s'identifie au quotient $H\backslash G$, on a une injection naturelle

$$G(A_S)\backslash(Gx)(A_S) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, H)$$

([Gi], III, corollaire 3.2.3). La proposition est donc une conséquence de 5.1. $\square$

Démonstration du théorème 1.1. On applique la proposition 6.1 aux données suivantes :
- G est le groupe donné dans 1.1 ;
- pour tout A_S-schéma Y on note $\mathrm{Fer}_X(Y)$ l'ensemble des sous-schémas fermés de $X \times_{A_S} Y$ qui sont de présentation finie sur Y (condition vide si Y est noethérien) ; alors Fer_X est un faisceau pour la topologie fppf, et l'on prend pour E sa restriction au petit site $\mathcal{S}$;
- on prend pour x l'élément z_0 de $E(A_S)$ correspondant à Z_0.

Bien entendu G opère sur E via son action sur X. Le théorème est alors une conséquence immédiate de 6.1, une fois établis les deux lemmes suivants (du premier, on n'utilise d'ailleurs que l'inclusion $\mathrm{loc}\,(Z_0) \subset (Gz_0)(A_S)$) :

Lemme 6.2 *On a* $\mathrm{loc}\,(Z_0) = (Gz_0)(A_S)$.

Lemme 6.3 *Le stabilisateur de z_0 est représentable par un sous-schéma en groupes de G, plat et affine sur A_S.*

Démonstration du lemme 6.2. Il s'agit de voir que, pour un sous-schéma Z de X, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $Z \in \mathrm{loc}\,(Z_0)$;

(ii) il existe une A_S-algèbre B, fidèlement plate de type fini, et un élément g de $G(B)$, tels que $Z_B = gZ_{0,B}$.

Notons C la A_S-algèbre produit des $\overline{A_v}$, pour $v \notin S$. Supposons (i) : il existe alors $g \in G(C)$ tel que $gZ_{0,C} = Z_C$ comme sous-schémas de $X_C = X \times_{A_S} C$. Comme G est un A_S-schéma de type fini, il existe une sous-algèbre de type fini C_0 de C telle que $g \in G(C_0)$. Comme Z_{C_0} et Z_{0,C_0} (donc aussi gZ_{0,C_0}) sont des sous-schémas de présentation finie de X_{C_0}, il existe $C_1 \subset C$, de type fini sur A_S et contenant C_0, telle que $gZ_{0,C_1} = Z_{C_1}$. La condition (ii) est donc satisfaite, avec $B = C_1$ (qui est bien fidèlement plate sur A_S comme sous-algèbre de C ; le fait que A_S soit un anneau de Dedekind est essentiel ici).

Réciproquement, si (ii) est vérifiée, on en déduit (i) en observant que toute algèbre B comme en (ii) admet un A_S-morphisme vers $\overline{A_v}$, pour tout $v \notin S$ (on pourra par exemple utiliser [EGA4], (14.5.4)). □

Démonstration du lemme 6.3. Désignons par un indice F la restriction des foncteurs considérés à la catégorie des F-schémas : ainsi, le schéma en groupes G_F opère sur le F-schéma X_F et sur le faisceau $\mathrm{Fer}_{X,F}$. D'après [DG], II, §1, théorème 3.6 b), le stabilisateur de $Z_{0,F}$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé H_F de G_F. Notons H l'adhérence schématique de H_F dans G, et montrons que H (vu comme A_S-faisceau) représente le stabilisateur de Z_0. Si Y est un A_S-schéma plat et $\gamma \in G(Y)$, on a en effet les équivalences :

$$\begin{array}{rcll} \gamma \in H(Y) & \Leftrightarrow & \gamma_F \in H_F(Y_F) & \text{(définition de } H \text{ et platitude de } Y) \\ & \Leftrightarrow & \gamma_F Z_{0,F} = Z_{0,F} & \text{(définition de } H_F) \\ & \Leftrightarrow & \gamma Z_0 = Z_0 & (Z_0 \text{ est fermé et plat}), \end{array}$$

d'où la représentabilité. La proposition 3.4 indique que H est affine sur A_S. □

Corollaire 6.4 *Soit G un A_S-schéma en groupes affine, plat et de type fini. Soit H_0 un sous-A_S-schéma en groupes fermé de G, plat sur A_S. Soit* $\mathrm{loc}\,(H_0)$ *l'ensemble des sous-groupes fermés H de G tels que, pour tout $v \notin S$, il existe $g_v \in G(\overline{A}_v)$ induisant un isomorphisme*

$$H_0 \times_{A_S} \overline{A_v} \overset{\mathrm{ad}(g_v)}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} H \times_{A_S} \overline{A_v}.$$

Alors les orbites de $G(A_S)$ sur $\mathrm{loc}\,(H_0)$ *sont en nombre fini, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un nombre fini de $G(A_S)$-classes de conjugaison de tels sous-schémas en groupes.* □

7 Cas géométrique

Modulo des hypothèses supplémentaires sur les groupes, les résultats précédents s'étendent au cas d'un anneau de Dedekind A de type fini sur $\mathbb{F}_p$ (p premier), et à ses complétés.

Dans ce qui suit, on notera F un corps global de caractéristique $p > 0$ (c'est-à-dire une extension de type fini et de degré de transcendance 1 de $\mathbb{F}_p$) ; on s'intéresse aux complétés de F en ses diverses places (cas local) et aux anneaux des courbes affines lisses connexes sur $\mathbb{F}_p$, de corps des fonctions F (cas global). Si v est une place de F, on notera F_v le complété de F en v et A_v son anneau d'entiers (noter cependant qu'il n'y a pas ici d'analogue de l'anneau A du cas arithmétique).

Le cas local requiert déjà une hypothèse additionnelle :

Lemme 7.1 *Soient v une place de F, et G un A_v-schéma en groupes affine de type fini de fibre générique lisse. Alors l'ensemble de cohomologie $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_v, G)$ est fini.*

La démonstration est similaire à celle du lemme 4.1 ; avec les mêmes notations, la lissité de G_K sert à assurer celle du morphisme d'orbite $\mathrm{GL}_{n,K} \to X_K$. Cette hypothèse est bien nécessaire : par exemple, les groupes $H^1(\mathbf{F}_p(\!(t)\!), \mu_p) = \mathbf{F}_p(\!(t)\!)^\times/(\mathbf{F}_p(\!(t)\!))^{\times p}$ et $H^1(\mathbf{F}_p[[t]], \mu_p) = \mathbf{F}_p[[t]]^\times/(\mathbf{F}_p[[t]])^{\times p}$ ne sont pas finis.

Bien que cela ne soit pas strictement utilisé dans la suite, mentionnons le cas géométrique du théorème de Borel-Serre local (remarque 4.2).

Proposition 7.2 *Soient v une place de F, et G un F_v-schéma en groupes affine de type fini. On suppose que G est lisse, que G/G^0 est d'ordre premier à p et que le radical unipotent $R_u(G_{\overline{F}_v})$ de $G_{\overline{F}_v}$ est défini et déployé sur F_v comme sous-groupe unipotent de G. Alors $H^1(F_v, G)$ est fini.*

L'hypothèse sur G/G^0 est fondamentale ; ainsi, $H^1(\mathbf{F}_p((t)), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est infini. Rappelons le lemme suivant [Sa, 1.13].

Lemme 7.3 *Soient k un corps quelconque et H un k–groupe affine lisse de type fini. Si U est un k-sous-groupe unipotent déployé (autre terminologie : k–résoluble) distingué de H, alors l'application canonique*

$$H^1(k, H) \xrightarrow{\pi} H^1(k, H/U)$$

est une bijection. C'est en particulier le cas pour k parfait et U le radical unipotent de G.

La démonstration originale étant canulée, nous y remédions ici.

Démonstration. Le groupe U admet une suite de composition centrale caractéristique dont les quotients sont des $\mathbb{G}_a^n$ [DG, IV.4.3.14]. Il suffit de traiter, par récurrence, le cas où $U = \mathbb{G}_a^n$. Toute k–forme galoisienne U' de $\mathbb{G}_a^n$ est isomorphe à $\mathbb{G}_a^n$ [O, §V.7, prop. b)] et vérifie donc $H^i(k, U') = 0$ pour tout $i > 0$. Si l'on tord U par $a \in Z^1(k_s/k, U(k_s))$ agissant par automorphismes intérieurs de H, on trouve donc $H^i(k, {}_aU) = 0$ et on en déduit l'injectivité de π (cf. [S], prop. 39, cor. 2). Comme U est un sous-groupe invariant abélien de G, on peut le tordre par $c \in Z^1(k_s/k, (H/U)(k_s))$ et, comme $H^2(k, {}_cU) = 0$, on en déduit la surjectivité de π (cf. [S], prop. 41, cor.). □

Démonstration de la proposition 7.2 :

Cas où G est fini (étale) d'ordre premier à p : soit F'_v/F_v une extension galoisienne telle que l'action de $\mathrm{Gal}(F'_v)$ soit triviale sur $G(F_{v,s})$. Vu que les fibres de la restriction $H^1(F_v, G) \to H^1(F'_v, G)$ sont finies (remarque 2.1), on peut supposer que $F'_v = F_v$, c'est-à-dire que G_{F_v} est constant. Alors $H^1(F_v, G) \cong \mathrm{Hom}_{ct}(\mathrm{Gal}(F_v), G)/\sim$. On a en fait $H^1(F_v, G) \cong \mathrm{Hom}_{ct}(\mathrm{Gal}(F_{v,\mathrm{mr}}/F_v), G)/\sim$ où $F_{v,\mathrm{mr}}$ désigne la clôture modérément ramifiée de F_v puisque le groupe d'inertie sauvage $\mathrm{Gal}(F_{v,s}/F_{v,\mathrm{mr}})$ est un pro-p-groupe (voir [GMS, §II.7]). Or le groupe $\mathrm{Gal}(F_{v,\mathrm{mr}}/F_v)$ est topologiquement engendré par deux éléments (*ibid*), d'où la finitude de $\mathrm{Hom}_{ct}(\mathrm{Gal}(F_{v,\mathrm{mr}}/F_v), G)$ et de $H^1(F_v, G)$.

Cas où G est connexe : le lemme 7.3 permet de supposer que $R_u(G_{\overline{F}}) = 1$. On supposera donc G réductif. On sait [Ko, §1] que le groupe G admet une résolution $1 \to E \to \widetilde{G} \to G \to 1$ où E est un F_v-tore quasi-trivial et $\widetilde{G}$ une extension d'un F_v-tore T par le F_v-groupe semi-simple simplement connexe $D(\widetilde{G})$. Vu que $H^1(F_v, D(\widetilde{G})) = 1$ ([BT2], th. 4.7), le bord $H^1(F_v, G) \to H^2(F_v, E)$ a un noyau trivial. Tordre la suite exacte $1 \to D(\widetilde{G}) \to \widetilde{G} \to T \to 1$ par un 1-cocycle galoisien à valeurs dans $\widetilde{G}(F_{v,s})$ ne change pas les hypothèses faites sur cette suite ; en raisonnant fibre par fibre [S, §5.5], on obtient l'injectivité de $H^1(F_v, \widetilde{G}) \to H^1(F_v, T)$, d'où la finitude de $H^1(F_v, \widetilde{G})$. Ainsi le noyau du bord $H^1(F_v, G) \to H^2(F_v, E)$ est fini. Raisonnant une nouvelle fois par torsion, ce bord $H^1(F_v, G) \to H^2(F_v, E)$ a des fibres finies. Or l'extension centrale $1 \to E \to \widetilde{G} \to G \to 1$ est d'ordre fini d, donc l'image du bord $H^1(F_v, G) \to H^2(F_v, E)$ est inclus dans le groupe ${}_dH^2(F_v, E)$, qui est fini, puisqu'il s'injecte dans un produit fini de groupes de Brauer d'extensions de F_v ([M2], th. III.6.9). On conclut que $H^1(F_v, \widetilde{G})$ est fini.

Cas général : le dévissage est alors le même que dans la preuve du théorème 6.2 de [BS]. □

Passons au cas global. Étant donné un ensemble fini S de places de F, on note $\mathbb{A}_{f,S}$ l'anneau des S-adèles de F, c'est-à-dire le sous-anneau de $\prod_{v \notin S} F_v$ formé des éléments (x_v) tels que $x_v \in A_v$ pour presque tout v. Si S est *non vide*, on notera A_S l'anneau des S-entiers de F, c'est-à-dire l'intersection des anneaux des $v \notin S$. Si C est la courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_p$ de corps de fonctions F, on peut aussi définir A_S comme l'anneau de la courbe affine $C \setminus S$; les anneaux A_S sont exactement les $\mathbb{F}_p$-algèbres de type fini, normales, de corps des fractions F.

Si G désigne un A_S-schéma en groupes affine de type fini, on cherche à montrer la finitude de $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G)$. La méthode utilisée dans le cas arithmétique faisait appel au théorème de Hermite, à la finitude des ensembles de classes $c(A_S, G)$ et au théorème de finitude de Borel-Serre. Le premier résultat n'est plus valable dans le cas géométrique et sera remplacé par le théorème de Chebotarev. Rappelons les analogues des deux autres dans la situation présente.

Comme dans le cas arithmétique, on pose

$$c(A_S, G) = \Big(\prod_{v \notin S} G(A_v)\Big) \setminus G(\mathbb{A}_{f,S}) \,/\, G(F).$$

Théorème 7.4 (Conrad [C, §5.1]) *Soient S un ensemble fini non vide de places de F et G un A_S-schéma en groupes affine de type fini. On suppose que G_F est lisse et que le radical unipotent $R_u(G_{\overline{F}})$ de $G_{\overline{F}}$ est défini et déployé sur F comme sous-groupe unipotent de G_F. Alors $c(A_S, G)$ est fini.*

Remarque 7.5 Il s'agit de l'énoncé de 2005. Utilisant la structure des groupes pseudo-réductifs (Conrad-Gabber-Prasad), Conrad a depuis étendu ce résultat à une classe plus vaste de groupes ainsi que tout ce qui suit d'ailleurs, cf. [C, §7.1].

Théorème 7.6 (Borel-Prasad) *Sous les hypothèses du théorème précédent, les fibres de l'application*

$$\omega_S : H^1(F, G) \to \prod_{v \notin S} H^1(F_v, G)$$

sont finies. De plus, si G_F est fini, ceci vaut plus généralement pour un ensemble S de densité nulle.

Dans le cas semi-simple, il s'agit du théorème B1 de [BP]. La preuve est fondée sur le principe de Hasse dû à Harder [H].

Démonstration du cas général du théorème 7.6.

Cas où G_F est fini : On peut supposer ici que S est fini ou infini de densité nulle. Soit F'/F une extension galoisienne telle que l'action de $\mathrm{Gal}(F')$ soit triviale sur $G(F_s)$ et satisfaisant $\gamma_{F'} = 1 \in H^1(F', G)$. Vu que les fibres de la restriction $H^1(F, G) \to H^1(F', G)$ sont finies (remarque 2.1), on peut supposer que $F' = F$, c'est-à-dire que G_F est constant. Le théorème de Chebotarev [J] montre alors que le noyau de $H^1(F, G) \to \prod_{v \notin S} H^1(F_v, G)$ est trivial ([BS], 7.3).

Cas où G_F est connexe : tout d'abord, il est loisible de se débarrasser du radical unipotent d'après le lemme 7.3. On supposera donc G_F réductif ; par torsion, il suffit en outre de voir que le noyau de ω_S est un ensemble fini. Ensuite, vu que les $H^1(F_v, G)$ sont finis (7.2), on peut prendre $S = \emptyset$. Il faut montrer que le noyau $Ш^1(F, G)$ de $\omega_\emptyset$ est fini. On sait que le groupe G_F admet une résolution $1 \to E \to \widetilde{G} \to G \to 1$ où E est un F-tore quasi-trivial et $\widetilde{G}$ une extension d'un F-tore T par le F-groupe semi-simple simplement connexe

$D(\widetilde{G})$ [Ko, §1]. Vu que $H^1(F,E)=1$ et $H^1(F_v,E)=1$ pour toute place $v\in S$ et que $H^2(F,E)$ s'injecte dans $\oplus_v H^2(F_v,E)$ le diagramme commutatif exact d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & H^1(F,\widetilde{G}) & \longrightarrow & H^1(F,G) & \longrightarrow & H^2(F,E) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v,\widetilde{G}) & \longrightarrow & \prod_v H^1(F,G) & \longrightarrow & \prod_v H^2(F_v,E)
\end{array}$$

indique que l'application $Ш^1(F,\widetilde{G}) \to Ш^1(F,G)$ est surjective. On est ramené au cas $\widetilde{G}$ où l'on va utiliser le principe de Hasse, i.e. $H^1(F,D(\widetilde{G}))=1$. Ceci valant pour toute forme tordue de $D(\widetilde{G})$, il suit que l'application $Ш^1(F,\widetilde{G}) \to Ш^1(F,T)$ est injective. Or $Ш^1(F,T)$ est fini d'après le théorème de Poitou-Tate (cf. [M2], th. I.4.10). Il en est de même de $Ш^1(F,\widetilde{G})$.

Cas général : la preuve est alors la même que [BS], §7.10. $\square$

La proposition 5.1 n'est plus vraie telle quelle (prendre $A_S=\mathbb{F}_p[t]$ et $G=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) ; on a cependant les énoncés suivants :

Proposition 7.7 *Soient S un ensemble fini non vide de places de F et G un A_S-schéma en groupes affine de type fini. On suppose que G_F est lisse et que le radical unipotent $R_u(G_{\overline{F}})$ de $G_{\overline{F}}$ est défini et déployé sur F comme sous-groupe unipotent de G_F. Alors, pour tout ensemble S' de places de F de densité nulle, les fibres de l'application naturelle*

$$H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S,G) \to \prod_{v\notin S'} H^1_{\mathrm{fppf}}(F_v, G_F/G_F^0)$$

sont finies.

Corollaire 7.8 *Sous les hypothèses de la proposition 7.7, on suppose de plus que G_F/G_F^0 est d'ordre premier à p. Alors $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S,G)$ est fini.*

Démonstration du corollaire : soit $S'\supset S$ un ensemble fini de places tel que G soit lisse sur $A_{S'}$ et G/G^0 fini étale sur $A_{S'}$. Comme la flèche de 7.7 se factorise par $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_{S'},G/G^0)$, il suffit de voir que cet ensemble est fini. Par changement de base (et la remarque 2.1) on peut supposer que G/G^0 est constant, et c'est alors une conséquence immédiate du fait que le groupe fondamental « premier à p » de $A_{S'}$ est topologiquement de type fini [SGA1, corollaire XIII.2.12]. $\square$

Démonstration de la proposition 7.7. Il existe un ensemble fini $S_0 \supset S$ de « mauvaises » places tel que le schéma en groupes $G \times_{A_S} A_{S_0}$ est lisse. Sans perte de généralité, on peut supposer que $S_0 \subset S'$.

Cas zéro : G est fini étale sur A_S. L'application considérée se factorise par l'application naturelle $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(F, G)$. Comme celle-ci est injective (lemme 3.6) l'assertion résulte du théorème 7.6.

Premier cas : G est lisse et connexe sur A_S. Il s'agit de voir que $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G)$ est fini ; l'argument est analogue à celui de la proposition 5.1 (premier cas) en remplaçant le théorème de Borel-Serre par le théorème 7.6 et en utilisant le théorème 7.4.

Second cas : G est extension d'un groupe fini étale par un groupe lisse connexe. L'application se factorise par $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G/G^0)$. Compte tenu du cas zéro, il suffit de montrer la finitude des fibres (ou seulement du noyau) de $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G/G^0)$: comme dans la preuve de 5.1 cela résulte de la finitude de $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G^0)$, vue au premier cas.

Cas général. Suivant le second cas, l'énoncé vaut si l'on remplace S par S_0. Il suffit alors de voir que l'application de restriction $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(A_{S_0}, G)$ est à fibres finies. Comme dans la preuve de 5.1, on considère l'application

$$\Phi : H^1_{\mathrm{fppf}}(A_S, G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(A_{S_0}, G) \times \prod_{v \in S \setminus S_0} H^1_{\mathrm{fppf}}(A_v, G).$$

Celle-ci est à fibres finies, par le même argument que dans 5.1 (compte tenu du théorème 7.4), et il en est de même de la projection du produit de droite vers $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_{S_0}, G)$ puisque les facteurs locaux $H^1_{\mathrm{fppf}}(A_v, G)$ sont finis (lemme 7.1), d'où la conclusion. $\square$

La proposition 7.7 donne lieu à la variante suivante du théorème 1.1 :

Théorème 7.9 *Soit G un A_S-schéma en groupes affine de type fini. Soit X un A_S-schéma plat, de type fini, muni d'une action*

$$G \times_{A_S} X \to X, \ \ (g, x) \mapsto \rho(g).x.$$

Soit Z_0 un sous-A_S-schéma fermé de X, plat sur A_S. Soit $\mathrm{loc}\,(Z_0)$ *l'ensemble des sous-schémas fermés Z de X* (automatiquement plats sur A_S) *tels que,* *pour toute place finie $v \notin S$, il existe $g_v \in G(A_v)$ induisant un isomorphisme*

$$Z_0 \times_{A_S} A_v \overset{\rho(g_v)}{\xrightarrow{\sim}} Z \times_{A_S} A_v.$$

On suppose que le stabilisateur H de $Z_{0,F}$ est lisse et que le radical unipotent $R_u(H_{\overline{F}})$ de $H_{\overline{F}}$ est défini et déployé sur F comme sous-groupe unipotent de G_F. Alors les orbites de $G(A_S)$ sur $\mathrm{loc}\,(Z_0)$ sont en nombre fini, i.e. $G(A_S)\backslash\mathrm{loc}\,(Z_0)$ est fini.

Notons que la définition de l'ensemble $\mathrm{loc}\,(Z_0)$ est plus restrictive dans le cas géométrique. Ceci étant, l'énoncé plus fort vaut aussi dans le cas géométrique si l'on suppose de plus que H/H^0 est d'ordre premier à p en utilisant alors le corollaire 7.8.

Remerciements : Nous remercions Brian Conrad et Gopal Prasad pour leurs commentaires bienvenus.

Références

[A] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, Bull. Soc. Math. France, Mem. **33** (1973).

[B] A. Borel, *Some finiteness properties of adele groups over number fields*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **16**, (1963), 5–30.

[BP] A. Borel et G. Prasad, *Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **69**, (1989), 119–171.

[BS] A. Borel et J.-P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comment. Math. Helv. 39 (1964), 111–164.

[BT] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local II*, Publ. Math. IHES **60** (1984).

[BT2] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre I. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), 671–698.

[C] B. Conrad, *Finiteness theorems for algebraic groups over function fields*, Compos. Math. **148** (2012), 555–639.

[DG] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson (1970).

[EGA4] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV.2 et IV.3*, Pub. Math. IHES **24** et **28** (1965).

[GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev, J.-P. Serre, *Cohomological Invariants in Galois Cohomology*, University Serie Lecture **28** (2003), American Mathematical Society.

[G] P. Gille, *Torseurs sur la droite affine*, Transform. Groups **7** (2002), 231–245.

[Gi] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **179**, Springer-Verlag (1971).

[H] G. Harder, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen. III*, J. Reine Angew. Math. **274/275** 1975), 125–138.

[HS] D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Math. **130** (2002), 241–273.

[J] M. Jarden, *The Cebotarev Density Theorem for Function Fields : An Elementary Approach*, Math. Ann. **261**, 467–475 (1982)

[Kn] M. A. Knus, *Quadratic and hermitian forms over rings*, Grundlehren der mat. Wissenschaften **294** (1991), Springer.

[Ko] R. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), 785-806.

[KS] K. Kato et S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. **118** (1983), 241–275.

[M1] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, **33** (1980), Princeton University Press.

[M2] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Mathematics **1** (1986), Academic Press.

[N] Ye. A. Nisnevich, *Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind*, C.R. Acad Sci. Paris, tome **299** (1984), 5–8.

[O] J. Oesterlé, *Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique* $p > 0$, Inv. Math. **78** (1984), 13–88.

[P] V. Platonov, *Le problème du genre dans les groupes arithmétiques*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **200** (1971), 793,Äì796, traduction anglaise Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 1503–1507

[PR] V. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics 139 (1994), Academic Press.

[Sa] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[S] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, 5e édition (1994), Springer-Verlag.

[SGA1] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., Revêtements étales et groupe fondamental, dirigé par A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 224. Springer (1971).

[SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, Schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. **151–153**, Springer (1970).

[UY] E. Ullmo et A. Yafaev, *Galois orbits and equidistribution of special subvarieties : towards the André-Oort conjecture*, prépublication (2006).